

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

a) (1 punto) Calcular los límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}}.$$

b) (1 punto) Calcular la integral $\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2} dx$.

c) (1 punto) Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0, \quad \pi_2 \equiv 2x + y - 3z - 1 = 0,$$

y la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2},$$

se pide:

- a) (1 punto) El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2 .
- b) (1 punto) El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY , XZ e YZ .
- c) (1 punto) La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2 .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz M .
- b) (1 punto) Hallar la matriz M^2 .
- c) (0,5 puntos) Hallar la matriz M^{25} .

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el punto $P(0, 1, 1)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}, \quad s \equiv \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$$

se pide:

- (1'5 puntos) Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r .
- (1'5 puntos) Determinar la recta que pasa por el punto P , tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x & + & 4y & & & = & 4k, \\ -k^3x & + & k^2y & + & kz & = & 0, \\ x & + & ky & & & = & k^2, \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutirlo en función del valor del parámetro k .
- (0'5 puntos) Resolver el sistema para $k = 1$.
- (0'5 puntos) Resolver el sistema para $k = 2$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & \text{si } x < 0, \\ k, & \text{si } x = 0, \\ \frac{\cos x - 1}{\sin x}, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

hallar el valor de k para que f sea continua en $x = 0$. Justificar la respuesta.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

- (1 punto) Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -\sin x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.
- (1 punto) Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\sin x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.